

Algèbre linéaire 2

3.4. Espace dual

Réf : Grifone §3.9

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr

Rappel

Fixons une base (e_1, \dots, e_n) de E et une base (f_1, \dots, f_p) de F .

\implies un isomorphisme entre $L(E, F) = \{\Phi: E \rightarrow F \text{ linéaire}\}$ et $M_{p,n}(K) = \{\text{matrices } p \times n\}$.

Matrice d'une application linéaire Φ :

$$M(\Phi)_{e_i, f_j} = \begin{pmatrix} \Phi(e_1)_1 & \Phi(e_2)_1 & \dots & \Phi(e_n)_1 \\ \Phi(e_1)_2 & \Phi(e_2)_2 & \dots & \Phi(e_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(e_1)_p & \Phi(e_2)_p & \dots & \Phi(e_n)_p \end{pmatrix}$$

Application linéaire définie par une matrice $A = (a_{ij})$:

uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs de base e_i :

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \cdot f_i$$

Cas spécial : pour deux bases $(e_i), (e'_i)$ du même E , la matrice de passage de (e_i) vers (e'_i)

$$P_{e_i \rightarrow e'_i} = M(\text{Id}_E)_{e'_i, e_i} = \text{coordonnées des } e'_i \text{ dans la base } (e_i)$$

Espace dual

Définition

On appelle **forme (K -)linéaire sur E** une application linéaire

$$\omega: E \longrightarrow K.$$

L'ensemble des formes linéaires $L_K(E, K)$ est noté E^* et est dit **espace dual de E** .

Exemple $(\mathbb{R}^n)^*$

$(\mathbb{R}^n)^*$ est l'ensemble de toutes les applications linéaires de la forme

$$\omega(x) = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n \quad \text{pour certains } a_i \in \mathbb{R}.$$

Slogan :

Vecteurs dans $(\mathbb{R}^n)^*$ \longleftrightarrow équations linéaires en n variables

Exemple $(\mathbb{R}^n)^*$

$(\mathbb{R}^n)^*$ est l'ensemble de toutes les applications linéaires de la forme

$$\omega(x) = a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n \quad \text{pour certains } a_i \in \mathbb{R}.$$

Slogan :

Vecteurs dans $(\mathbb{R}^n)^*$ \longleftrightarrow équations linéaires en n variables

En termes des matrices :

$$\text{vecteurs } x \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \text{vecteurs colonnes } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{formes linéaires } \omega \in (\mathbb{R}^n)^* \longleftrightarrow \text{vecteurs lignes } \omega = (a_1 \quad \dots \quad a_n).$$

Donc :

$$\omega(x) = (a_1 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Base duale

Corollaire (Grifone Prop. 3.34 + Thm. 3.35)

- (1) Soit E de dimension finie n . Alors $\dim(E^*) = n$.
- (2) Associé à une base (e_1, \dots, e_n) de E est sa **base duale** (e_1^*, \dots, e_n^*) de E^* , définie par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit : $e_i^*(v) = i$ -ième coordonnée de v dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Exemple : $M_{n,n}(K)^*$

Exemple : la trace $\text{Tr}: M_{n,n}(K) \longrightarrow K; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$

Exemple : $M_{n,n}(K)^*$

Exemple : la trace $\text{Tr}: M_{n,n}(K) \longrightarrow K; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$

Base canonique de $M_{n,n}(K)$: $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Base duale de $M_{n,n}(K)^*$: $E_{ij}^*: M_{n,n}(K) \longrightarrow K; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{ij}.$

En effet : $E_{ij}^*(E_{kl}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple : $M_{n,n}(K)^*$

Exemple : la trace $\text{Tr}: M_{n,n}(K) \longrightarrow K; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$

Base canonique de $M_{n,n}(K)$: $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Base duale de $M_{n,n}(K)^*$: $E_{ij}^*: M_{n,n}(K) \longrightarrow K; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto a_{ij}.$

$$\text{En effet : } E_{ij}^*(E_{kl}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\implies \text{Tr} = E_{11}^* + E_{22}^* + \dots + E_{nn}^* \text{ dans } M_{n,n}(K)^*.$$

Bidual

Définition

Soit E un espace vectoriel. L'espace dual de son espace dual

$$E^{**} = (E^*)^*$$

est dit **espace bidual** de E .

Bidual

Définition

Soit E un espace vectoriel. L'espace dual de son espace dual

$$E^{**} = (E^*)^*$$

est dit **espace bidual** de E .

Exemple : pour tout vecteur $v \in E$, on a la forme linéaire sur E^*

$$\text{ev}_v: E^* \longrightarrow K; \quad \text{ev}_v(\omega) = \omega(v).$$

Bidual

Définition

Soit E un espace vectoriel. L'espace dual de son espace dual

$$E^{**} = (E^*)^*$$

est dit **espace bidual** de E .

Exemple : pour tout vecteur $v \in E$, on a la forme linéaire sur E^*

$$\text{ev}_v: E^* \longrightarrow K; \quad \text{ev}_v(\omega) = \omega(v).$$

Theorème (Grifone Prop. 3.36)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors l'application

$$\text{ev}: E \longrightarrow E^{**}; \quad v \longmapsto \text{ev}_v$$

est un isomorphisme (linéaire).

Bidual

Définition

Soit E un espace vectoriel. L'espace dual de son espace dual

$$E^{**} = (E^*)^*$$

est dit **espace bidual** de E .

Exemple : pour tout vecteur $v \in E$, on a la forme linéaire sur E^*

$$\text{ev}_v: E^* \longrightarrow K; \quad \text{ev}_v(\omega) = \omega(v).$$

Théorème (Grifone Prop. 3.36)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors l'application

$$\text{ev}: E \longrightarrow E^{**}; \quad v \longmapsto \text{ev}_v$$

est un isomorphisme (linéaire).

Remarque : base (e_i) de $E \implies$ base (e_i^*) de $E^* \implies$ base $(e_i^{**}) = (\text{ev}_{e_i})$ de E^{**} .

Annulateur de $F \subset \mathbb{R}^n$

Rappel du slogan : $\text{vecteurs dans } (\mathbb{R}^n)^* \longleftrightarrow \text{équations linéaires en } n \text{ variables}$

Alors : pour un sous-ev $F \subset \mathbb{R}^n$, son annulateur F^0 est l'espace des équations linéaires

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{pour } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

telles que tout vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in F$ est solution.

Annulateur de $F \subset \mathbb{R}^n$

Rappel du slogan : $\text{vecteurs dans } (\mathbb{R}^n)^* \longleftrightarrow \text{équations linéaires en } n \text{ variables}$

Alors : pour un sous-ev $F \subset \mathbb{R}^n$, son annulateur F^0 est l'espace des équations linéaires

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{pour } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

telles que tout vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in F$ est solution.

Autrement dit :

trouver des équations cartésiennes de $F \subset \mathbb{R}^n \iff$ trouver une base de $F^0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$

Rappel : calcul d'une base de $F^0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$

Supposons que $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$$

Alors $F^0 = \{\omega \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \omega(v_1) = \dots = \omega(v_k) = 0\}$.

Rappel : calcul d'une base de $F^0 \subset (\mathbb{R}^n)^*$

Supposons que $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$$

Alors $F^0 = \{\omega \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \omega(v_1) = \dots = \omega(v_k) = 0\}$.

= l'ensemble des $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\omega(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ t.q.

$$a_1 x_{11} + \dots + a_n x_{1n} = 0$$

$$a_1 x_{21} + \dots + a_n x_{2n} = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_1 x_{k1} + \dots + a_n x_{kn} = 0$$

Sous-espaces de $E \longleftrightarrow$ sous-espaces de E^*

Définition

Soit E un espace vectoriel et $G \subset E^*$ un sous-espace vectoriel.

On appelle **annulateur de G** le sous-espace de E

$${}^0G = \{v \in E \mid \forall \omega \in G : \omega(v) = 0\}.$$

Sous-espaces de $E \longleftrightarrow$ sous-espaces de E^*

Définition

Soit E un espace vectoriel et $G \subset E^*$ un sous-espace vectoriel.

On appelle **annulateur de G** le sous-espace de E

$${}^0G = \{v \in E \mid \forall \omega \in G : \omega(v) = 0\}.$$

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors :

(1) $F = {}^0(F^0)$.

(2) $\dim(F) + \dim(F^0) = n$.

Sous-espaces de $E \longleftrightarrow$ sous-espaces de E^*

Définition

Soit E un espace vectoriel et $G \subset E^*$ un sous-espace vectoriel.

On appelle **annulateur de G** le sous-espace de E

$${}^0G = \{v \in E \mid \forall \omega \in G : \omega(v) = 0\}.$$

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors :

(1) $F = {}^0({}^0F)$.

(2) $\dim(F) + \dim({}^0F) = n$.

Morale :

$F \subset E$ de $\dim(F) = k$	$\xleftrightarrow{\text{annulateur}}$	$F^0 \subset E^*$ de $\dim(G) = \dim(E) - k$
--------------------------------	---------------------------------------	--